

KONTROL *ASYMPTOTIC TRACKING* PADA SYSTEM NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN *NONHYPERBOLIC ZERO DINAMIC* (PENDULUM TERBALIK)

CONTROL ASYMPTOTIC TRACKING SYSTEM NON LINEAR WITH USED NONHYPERBOLIC ZERO DINAMIC

Lilis Harianti Hasibuan^{1§}, La Ode Sabran²

¹Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: lilisharianti@uinib.ac.id]

²Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: ld.sabran@uho.ac.id]

[§]*Corresponding Author*

Received 2019; Accepted 2019; Published 2019

Abstrak

Tulisan ini membahas tentang permasalahan *control tracking* pada system pendulum terbalik pada dua buah gerobak/kereta yang dikenal dengan system yang non linear. Adapun sifat-sifat dari system pendulum terbalik pada dua buah gerobak/kereta adalah nonlinear, nonminimum phase dengan system zero nonhyperbolic system. Pada jurnal ini pertama sekali akan ditunjukkan bahwa nonhyperbolic zero dinamik tidak begitu perlu diaplikasikan pada teori keluaran regulation. Pada bidang lain, masalah asymptotic tracking pada dua gerobak/kereta dengan menggunakan system pendulum terbalik yang mana system pendulum terbalik ini mampu mengikuti pergerakan secara sinusoidal. Pergerakan tracking pada system pendulum terbalik yang mengikuti pergerakan sinusoidal inilah yang merupakan hasil dari keluaran teori regulation. Sistem kontrol dibutuhkan untuk menstabilkan dan membuat batang pendulum pada posisi equilibriumnya yaitu pada sudut nol radian. Sistem pendulum kereta memiliki beberapa permasalahan kontrol diantaranya *tracking*. System ini terdiri dari sebuah kereta yang pergerakannya sepanjang track terbatas pada gerak linear dan gerak batang yang dipasang pada kereta. Antara kereta dan batang dihubungkan dengan sebuah engsel. Pendulum-kereta merupakan sistem yang tidak stabil dan nonlinear, sehingga untuk mengontrolnya diperlukan teknik kontrol yang tidak mudah dibandingkan dengan teknik kontrol pada sistem yang linear dan stabil.

Kata Kunci: asymptotic tracking, nonhyperbolic, non linear output regulation, non minimum phase

Abstract

This paper discusses the problem of tracking control on the inverted pendulum system on two carts / trains known as non-linear systems. The properties of the inverted pendulum system on two carts are nonlinear, non-minimum phase with zero non-hyperbolic system. In this journal, we will first show that dynamic nonhyperbolic zero does not need to be applied to the output regulation theory. In other fields, the problem of asymptotic tracking on two carts / trains using an inverted pendulum system in which the inverted pendulum system is capable of following sinusoidal movements. The tracking movement in the inverted pendulum system that follows sinusoidal movement is the result of the regulation theory output. The control system is needed to stabilize and make the pendulum rod at its equilibrium position at zero angle radians.

The train pendulum system has several control issues including tracking. This system consists of a train whose movement along the track is limited to linear motion and the motion of the rod mounted on the train. Between the carriage and the trunk is connected by a hinge. Pendulum-train is an unstable and nonlinear system, so to control it requires a control technique that is not easy compared to the control technique in a linear and stable system.

Keyword: *asymptotic tracking, nonhyperbolic, non linear output regulation, non minimum phase*

1. Pendahuluan

Penelitian tentang pendulum terbalik sudah lama dilakukan diberbagai belahan dunia, dengan berbagai cara dan bentuk penelitian yang dilakukan agar dapat membuat kesimpulan tentang pengontrol pendulum terbalik. Prinsip kerja dari pendulum terbalik membuat banyak peneliti melakukan penelitian tentang pendulum terbalik salah satunya pada bidang model kereta, karakteristik dari sistem nonlinear yang sederhana tapi sulit untuk dikontrol pada bidang model kereta sehingga sering menggunakan berbagai metode untuk mengontrolnya. Sistem pendulum terbalik merupakan sistem yang tidak stabil dan nonlinear, sehingga untuk mengontrolnya diperlukan teknik kontrol yang tidak mudah dibanding dengan teknik kontrol pada sistem yang linear dan stabil [8]. Secara umum, sistem pendulum terbalik banyak digunakan sebagai bentuk nyata dalam suatu sistem kontrol Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, sistem pendulum terbalik merupakan suatu sistem yang sangat penting dalam penelitian di bidang kontrol. Beberapa teori dan metode kontrol banyak diuji dan dibandingkan melalui pengujian terhadap sistem pendulum terbalik. Hal tersebut dikarenakan sistem pendulum terbalik merupakan sistem nonlinear yang kompleks dan

tidak stabil, dapat dilinearisasi di sekitar titik kesetimbangan, serta mudah diterapkan dalam sistem aktual Sistem pendulum terbalik memiliki beberapa permasalahan kontrol diantaranya swing-up, stabilisasi, dan tracking. Swing-up merupakan kondisi sistem pendulum terbalik dalam mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung menjadi terbalik. Selanjutnya kondisi sistem pendulum terbalik dalam mempertahankan posisi pendulum dalam keadaan terbalik disebut stabilisasi oleh [9]. Sedangkan tracking adalah upaya untuk mengontrol kereta agar mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan mempertahankan pendulum pada posisi terbalik. Oleh karena itu, penelitian yang membahas tentang kestabilan dari sistem pendulum terbalik melalui Linear Quadratic Regulator (LQR) agar stabil dan dapat dikontrol [9]. Sedangkan Menurut A. Isidori dan C.I. Byrnes [1] pendulum terbalik pada sebuah kereta bergerak adalah system klasik yang digunakan untuk mendemonstrasikan aspek teori dan aspek praktis dari teori control. System ini terdiri dari sebuah kereta yang pergerakannya sepanjang track terbatas pada gerak linear dan gerak batang yang dipasang pada kereta. Antara kereta dan batang dihubungkan dengan sebuah engsel. Antara kereta

dan batang dihubungkan dengan sebuah engsel. Kereta dilengkapi dengan sebuah motor yang menerima tenaga listrik. Pendulum-kereta merupakan sistem yang tidak stabil dan nonlinear, sehingga untuk mengontrolnya diperlukan teknik kontrol yang tidak mudah dibandingkan dengan teknik kontrol pada sistem yang linear dan stabil. Sedangkan menurut Hassan K. Khalil [3] secara umum sistem pendulum-kereta banyak digunakan sebagai *plant* nyata dalam suatu sistem kontrol.

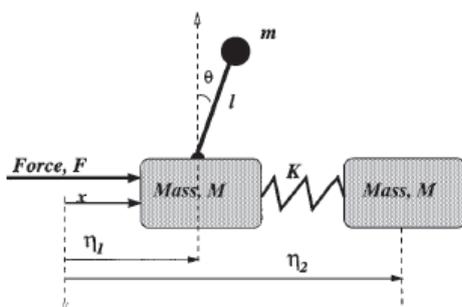
2. Landasan Teori

Sistem kontrol dibutuhkan untuk menstabilkan dan membuat batang pendulum pada posisi equilibriumnya yaitu pada sudut nol radian. Sistem pendulum-kereta memiliki beberapa permasalahan kontrol diantaranya *tracking*. Selanjutnya pergerakan system dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(M + m)\ddot{\eta}_1 + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + b\dot{\eta}_1 = u$$

$$m(\ddot{\eta}_1 \cos \theta + l\ddot{\theta} - g \sin \theta) = 0$$

Untuk memahami persamaan pergerakan system di atas perhatikan gambar di bawah ini:



Gambar 1: system pendulum terbalik pada dua gerobak/kereta

Keterangan:

M	Massa gerobak/kereta
m	Massa block pendulum
l	Panjang pendulum
g	Akselerasi yang diakibatkan oleh gravitasi
b	Koefisien viscous friction pergerakan gerobak/kereta
θ	Posisi sudut batang pendulum dengan sumbu vertikal
η_1	Posisi gerobak/kereta 1
η_2	Posisi gerobak/kereta 1
u	Control/force

Untuk mempelajari masalah symptotik tracking pada system non linear dengan nonhyperbolic zero dinamik, Devasia menggunakan pendulum terbalik pada satu gerobak saja tetapi dia juga menghasilkan system pendulum terbalik untuk dua gerobak/kereta seperti yang ditunjukkan gambar 1, persamaan untuk system pendulum terbalik untuk dua gerobak yaitu sebagai berikut:

$$(M + m)\ddot{\eta}_1 + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + b\dot{\eta}_1 = u + K(\eta_2 - \eta_1)$$

$$m(\ddot{\eta}_1 \cos \theta + l\ddot{\theta} - g \sin \theta) = 0$$

$$M\ddot{\eta}_2(t) + K(\eta_2(t) - \eta_1(t)) = 0$$

Dimana η_2 menyatakan posisi dari gerobak kedua. Dan K menyatakan konstanta kontroler.

Dengan memisalkan variable

$$x_1 = \eta_1, x_2 = \dot{\eta}_1, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}, x_5 = \eta_2, x_6 = \dot{\eta}_2$$

Persamaan state-spase pada system pendulum terbalik pada dua gerobak/kereta adalah:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{M + m(\sin x_3)^2} (u + mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 \\
&\quad - mg \cos x_3 \sin x_3 + K(x_5 - x_1)) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{l(M + m(\sin x_3)^2)} ((M + m)g \sin x_3 \\
&\quad - u \cos x_3 \quad (1) \\
&\quad + bx_2 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 \\
&\quad - K(x_5 - x_1) \cos x_3) \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{K}{M} (x_1 - x_5) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

menunjukkan bahwa [1] adalah system nonminimum space dengan nonhiperbolik zero dynamic dan titik luar yang berdasarkan dari keluaran dari tracking pendulum terbalik. Devasia mengubah system nonhyperbolik dengan memodifikasi system dinamik, dan idenya. mengembangkan metode aproksimasi untuk menyelesaikan masalah symptotik tracking dengan menggunakan system pendulum terbalik pada dua gerobak/kereta.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Penyelesaian Persamaan Regulator

Misalkan system pendulum terbalik pada dua gerobak/kereta memenuhi bentuk standar berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\
y &= h(x)
\end{aligned} \quad (2)$$

System pendulum terbalik memiliki vector state:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_6]^T \quad g(x), f(x)$$

dapat dilihat di (*) dan $h(x) = x_1$

Kita akan memisalkan asymptotic tracking yang mana keluaran y yang mengikuti sinyal input sinusoidal yaitu $y_d(t) = A \sin \omega t$. Diperkenalkan suatu eksternal generator yaitu:

$$\dot{v}(t) = Sv(t), \quad t \geq 0, v(0) = v_0 \quad (3)$$

(*)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{M + m(\sin x_3)^2} (mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 - mg \cos x_3 \sin x_3 \\ + K(x_5 - x_1)) \\ x_4 \\ \frac{1}{l(M + m(\sin x_3)^2)} ((M + m)g \sin x_3 + bx_2 \cos x_3 \\ - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 - K(x_5 - x_1)) \\ x_6 \\ \frac{K}{M} (x_1 - x_5) \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M + m(\sin x_3)^2} \\ 0 \\ -\cos x_3 \\ \frac{1}{l(M + m(\sin x_3)^2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, v_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka jelas $y_d(t) = v_1(t), t \geq 0$. Masalah untuk asymptotic tracking adalah state himpunan

control $u = k(x, v)$ ke stabil local pada system close-loop untuk mencapai titik kestabilan tracking di nol yang stabil asymptotic, dengan pencapaian sebagai berikut:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_d(t)) = 0 \quad (4)$$

Persamaan 4 di atas dikenal sebagai bentuk standar keluaran teori regulasi atau diasumsikan $\left\{ \left(\frac{\partial f(0)}{\partial x} \right), g(0) \right\}$ adalah stabil. Permasalahan di atas adalah merupakan solusi jika dan hanya jika persamaan regulator diasosiasikan dengan masalah tracking di atas :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(v)}{\partial v} S v &= f(x(v)) + g(x(u))u(v) \\ h(x(v)) &= v_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Merupakan solusi untuk fungsi $x(v)$ dan $u(v)$ yang memenuhi $x(0) = 0$ dan $u(0) = 0$. Faktanya

telah diasumsikan $\left\{ \left(\frac{\partial f(0)}{\partial x} \right), g(0) \right\}$ adalah stabil,

dan L adalah konstanta feedback sehingga

$\left\{ \left(\frac{\partial f(0)}{\partial x} \right) + g(0) \right\} L$ adalah stabil, kemudian

himpunan control diberikan sebagai berikut:

$$u = u(v) + L(x - x(v)) \quad (6)$$

persamaan 6 merupakan solusi dari persamaan regulator pada persamaan 5.

Ada beberapa remark yang perlu diperhatikan untuk mendapatkan keluaran dari regulation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(v)}{\partial v} S v &= f(x(v)) + g(x(u))u(v) \\ h(x(v)) &= v_1 \end{aligned}$$

Isidori dan Byrnes telah mempelajari solusi dari persamaan regulator pada persamaan 5 di atas. Persamaan regulator 5 dapat dicari solusinya jika zero dinamik pada persamaan 2 dan eksternal regulator pada persamaan 3 terdefinisi dengan baik, dan zero dinamik menyebabkan terbentuknya invariant manifold pada system tersebut. Untuk masalah ini, zero dynamic terdefinisi dengan baik, dan dapat dituliskan seperti persamaan di bawah ini :

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \frac{\omega^2}{l} v_1 \cos x_3 + \frac{g}{l} \sin x_3 \quad (7)$$

$$\dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = \frac{K}{M} (v_1 - x_5)$$

$$\dot{v}_1 = \omega v_2, \quad \dot{v}_2 = -\omega v_1$$

Persamaan (7) diubah menjadi persamaan dalam Bentuk:

$$\dot{z} = \beta(z, v) \quad (8)$$

$$\dot{v} = S v \quad (9)$$

Dengan

$$z = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \beta(z, v) = \begin{bmatrix} x_4 \\ \frac{\omega^2}{l} v_1 \cos x_3 + \frac{g}{l} \sin x_3 \\ x_6 \\ \frac{K}{M} (v_1 - x_5) \end{bmatrix}$$

Invariant manifold yang telah disebutkan pada remark 1 didefinisikan oleh fungsi licin $z(v)$

dengan $z(0) = 0$, memenuhi persamaan differential parsial sebagai berikut:

$$\frac{\partial z(v)}{\partial v} S v = \beta(z(v), v) \quad (10) \quad \square$$

Lemma 3.1. [2] Jika zero dynamic system adalah hiperbolik dan $\frac{(\partial\beta(0,0))}{\partial z}$ tidak mempunyai nilai eigen yang imajiner , maka teorema *center manifold* memiliki eksistensi solusi, yang memuat semua nilai eigen pada S adalah pada sumbu imajiner dan di bidang kompleks.

Bukti. Untuk memeriksa apakah nilai eigen dari S berada pada sumbu imajiner pada bidang kompleks , tetapi zero dynamic system tidaklah hyperbolic karena:

$\frac{\partial(\beta(0,0))}{\partial z}$ mempunyai nilai eigen imajiner $\pm j\sqrt{K/M}$. Disini akan ditunjukkan bahwa solusi $z(v)$ pada persamaan (10) ada. Kita dapat membagi persamaan (10) menjadi dua bagian yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial z_1(v)}{\partial v} S v = \beta_1(z_1(v), v) \quad (11)$$

$$\frac{\partial z_2(v)}{\partial v} S v = \beta_2(z_2(v), v) \quad (12)$$

Dengan

$$z_1(v) = \begin{bmatrix} x_3(v) \\ x_4(v) \end{bmatrix}, z_2(v) = \begin{bmatrix} x_5(v) \\ x_6(v) \end{bmatrix}, z(v) = \begin{bmatrix} z_1(v) \\ z_2(v) \end{bmatrix}$$

Dan

$$\beta_1(z_1, v) = \beta_1(x_3, x_4, v) = \begin{bmatrix} x_4 \\ \frac{\omega^2}{l} v_1 \cos x_3 + \frac{g}{l} \sin x_3 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2(z_2, v) = \beta_2(x_5, x_6, v) = \begin{bmatrix} x_6 \\ \frac{K}{M} (v_1 - x_5) \end{bmatrix}$$

Subsistem persamaan (11) adalah hyperbolic karena nilai eigen dari $\frac{(\partial\beta_1(0,0))}{\partial z_1}$ adalah $\pm \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Sehingga dengan menggunakan teorema center manifold , fungsi licin $z_1(v)$ dengan $z_1(0) = 0$ ada dan memenuhi persamaan (11) secara local. Tetapi untuk persamaan (12) , karena $\beta_2(z_2, v)$ adalah linear di z_2 dan v , dengan menggunakan metode standar untuk menyelesaikan versi linear dari (12), dapat dibuat dalam bentuk yang lebih eksplisit yang akan memenuhi:

$$z_2(v) = \begin{bmatrix} x_5(v) \\ x_6(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\gamma^2} v_1 \\ \frac{\omega}{1-\gamma^2} v_2 \end{bmatrix} , \quad \text{dengan}$$

$\gamma = \omega / \sqrt{K/M}$. Sehingga invariant manifold yang didefinisikan pada (10) ada berbentuk nonhyperbolic pada system (2).

Solusi dari (10) adalah ada. Kita dapat juga dengan mudah membuat solusi dari persamaan regulator (5) oleh metode standar yang diberikan pada (10). Faktanya, ini tidak sulit untuk diperiksa, untuk system kita solusi dari persamaan (5) adalah:

$$x(v) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \omega v_2 \\ x_3(v) \\ x_4(v) \\ \frac{1}{1-\gamma^2} v_1 \\ \frac{\omega}{1-\gamma^2} v_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$u(v) = -(M + m \sin^2 x_3(v)) \omega^2 v_1 - m l x_4^2(v) \sin x_3(v) + m g \cos x_3(v) \sin x_3(v) + b \omega v_2 + K \left(v_1 - \frac{1}{1-\gamma^2} v_1 \right) \quad (14)$$

Dimana $x_3(v)$ dan $x_4(v)$ ada. ■

3.2. Aproksimasi Center Manifold

Jacobian linearisasi dari system pendulum terbalik pada dua gerobak/kereta dapat dihitung sebagai berikut:

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{M} & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 & \frac{K}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{M} & \frac{b}{M} & \frac{(M+m)g}{M} & 0 & -\frac{K}{M} & 0 \\ \frac{K}{M} & \frac{b}{M} & \frac{(M+m)g}{M} & 0 & -\frac{K}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{M} & 0 & 0 & 0 & -\frac{K}{M} & 0 \\ \frac{K}{M} & 0 & 0 & 0 & -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yang mana ini adalah terkontrol . state hukum feedback control pada persamaan (6) yang merupakan solusi keluaran dari masalah regulation ada, dengan titik luar yang ada pada (2). Akan tetapi solusi untuk $x_3(v)$ dan $x_4(v)$ diperlukan. Karena fungsi nonlinear $\beta_1(.,.)$ tidaklah mudah, tidak mungkin untuk menyelesaikan (11) secara analitik, kita akan menggunakan aproksimasi dengan ekspansi power series untuk $x_3(v)$ dan $x_4(v)$ untuk menyelesaikan persamaan:

$$\frac{\partial z(v)}{\partial v} S v = f(z(v), v) \quad (15)$$

Dimana $v \in R^q, S \in R^{q \times q}$ dan $f(.,.) : R^n \times R^q \rightarrow R^n$ adalah fungsi licin yang terdefinisi di seluruh persekitaran titik pusat $R^n \times R^q \rightarrow R^n$, yang memenuhi $f(0,0) = 0$. Kita akan membuat bentuk ekspansi dengan bentuk seperti dibawah ini:

$$z(v) = \sum_{k \geq 1} Z_l v^{[k]} \quad (16)$$

Dimana $v^{[l]}$ dinotasikan dalam vector:

$$v^{[l]} = [v_1^l v_1^{l-1} v_2 \dots v_1^{l-1} v_q v_1^{l-2} v_2^2 v_1^{l-2} v_2 v_3 \dots v_1^{l-2} v_2 v_q \dots v_q^l]^T \quad (17)$$

Persamaan (15) dipenuhi secara baik. Substitusikan (16) ke persamaan (15), ekspansikan persamaan (15) ke deret Taylor pada v , dan diidentifikasi koefisien dari $v^{[l]}, l = 1, 2, \dots$ yang mana menghasilkan hasil sebagai berikut:

Teorema 3.3. [1] Sebuah formal series pada bentuk persamaan (16) (adalah unik jika $p = m$, persamaan dari (15) ada jika:

$$\text{rank} \left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial z} - \lambda I \right] = n \quad (18)$$

untuk semua λ diberikan oleh:
 $\lambda = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_l}, l = 1, 2, \dots, \infty \quad (19)$

dimana $i_1, \dots, i_l \in \{1, 2, \dots, q\}$ dan $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ adalah nilai eigen dari S .

BUKTI :

Teorema 3.3 dapat ditunjukkan menggunakan perluasan yang sama dan terus untuk dikembangkan. Faktanya koefisien matriks $Z_l, l = 1, 2, \dots$ dapat diselesaikan dengan persamaan aljabar linear, perlu dicatat bahwa dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk menyelesaikan persamaan (15).

Tabel 1.

Maximal Steady –State Tracking Error Persentase dengan $\Omega = 1$

Frekuensi	Nonlinear	Linear
A=1.0	0.00030	0.0101
A=2.0	0.0011	0.0442
A=3.0	0.0052	0.1144
A=4.0	0.0184	0.2630
A=5.0	0.0531	0.7793
A=6.0	0.1306	Tidak stabil

Kondisi Rank pada persamaan (18) adalah sedikit lebih kuat dari asumsi hiperbolik pada matriks $(\partial f(0,0))/\partial z$ karena kondisi rank tersebut tidak hanya dilarang untuk nilai eigen yang imajiner. Karena semua nilai eigen dari matriks S mempunyai bagian real 0, dan $(\partial \beta_1(0,0))/\partial z$ adalah hiperbolik, persamaan (11) memenuhi kondisi (18). Sehingga persamaan (11) dibuat menjadi ekspansi deret Taylor sehingga menjadi bentuk (16). Faktanya persamaan (11) diekspansikan menjadi aproksimasi derajat tiga, seperti persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned} x_3^{(3)}(v) &= a_{10}v_1 + a_{12}v_1v_2^2 \\ &+ a_{30}v_1^3 \quad (20) \\ x_4^{(3)}(v) &= (a_{10}v_2 + a_{12}v_2^3)\omega \\ &+ (3a_{30} - 2a_{12})v_1^2v_2\omega \quad (21) \end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{-\alpha}{\beta + \omega^2}, \\ a_{12} &= \frac{a_{10}^2\omega^2(3\alpha + \beta a_{10})}{(\beta + \omega^2)(\beta + 9\omega^2)} \\ a_{30} &= \frac{a_{10}^2(\beta + 7\omega^2)(3\alpha + \beta a_{10})}{6(\beta + \omega^2)(\beta + 9\omega^2)} \end{aligned}$$

Dengan $\alpha = \omega^2/l$ dan $\beta = g/l$.

Solusi untuk derajat ketiga dari persamaan (11), kita dapat solusi derajat ketiga dari persamaan regulator (5) dari persamaan (13) dan persamaan (14) seperti berikut ini:

$$x^{(3)}(v) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \omega v_2 \\ x_3^{(3)}(v) \\ x_4^{(3)}(v) \\ \frac{1}{1-\gamma^2} v_1 \\ \frac{\omega}{1-\gamma^2} v_1 \end{bmatrix}$$

$$u^{(3)}(v) = -(M + m(a_{10}v_1)^2)\omega^2 v_1 - ml(\omega a_{10}v_2)^2(a_{10}v_1) + mg(x_3^{(3)}(v)) - \frac{2}{3}(a_{10}v_1)^3 + b\omega v_2 + K(v_1 - \frac{1}{1-\gamma^2}v_1)$$

3.3. Simulasi

Berdasarkan $x^{(3)}(v)$ dan $u^{(3)}(v)$, aproksimasi derajat ketiga, diperoleh himpunan control sebagai berikut:

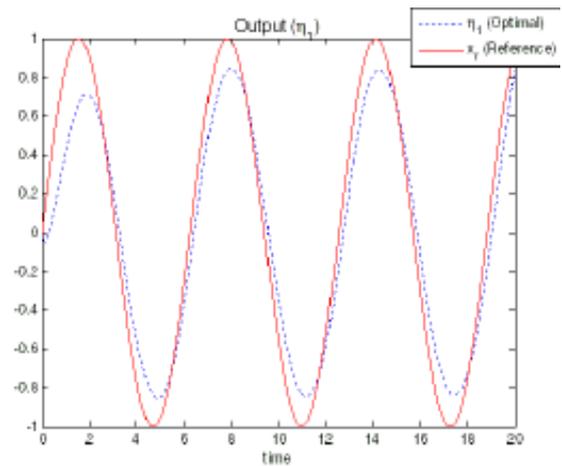
$$u = u^{(3)}(v) + L(x - x^{(3)}(v)) \quad (22)$$

Dimana $L = [4.82 \ 15.9 \ 35.9 \ 6.32 \ -4.41 \ -1.71]$, nilai eigen dari $\frac{\partial f(0)}{\partial x} + g(0)L$ akan sama dengan -2.

Perlakuan control yang kita gunakan dievaluasi dengan menggunakan simulasi, dengan berbagai nilai amplitude A dan frekuensi ω . Nilai parameter diberikan dimana $b = 12.98 \text{ kg/s}$, $M = 1.378 \text{ kg}$, $l = 0.325 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, dan $m = 0.051 \text{ kg}$

Perlakuan Kontrol dapat dilihat pada gambar

berikut:



Gambar 2. Perlakuan control yang kita gunakan dievaluasi dengan menggunakan simulasi, dengan berbagai nilai amplitude A dan frekuensi ω .

Table 1 di atas adalah maksimal steady-state tracking errors pada close-loop system dengan berbagai nilai amplitude dan frekuensi $\omega = 1$, sehingga diperoleh hukum control linear seperti berikut:

$$u = u^{(1)}(v) + L(x - x^{(1)}(v)) \quad (23)$$

Dimana $u^{(1)}(v)$ dan $x^{(1)}(v)$ adalah aproksimasi deret pangkat pertama dari $u(v)$ dan $x(v)$. Ini dapat dilihat bahwa hukum control nonlinear pada persamaan (22) tidak hanya memiliki superior tracking yang menggunakan himpunan control pada persamaan (23), tetapi juga mengikuti sinyal sinusoidal dengan memperbesar amplitudo. Pada gambar 2 di atas menunjukkan perlakuan tracking dari system nonlinear dan kontroler linear dengan frekuensi $\omega = 1$ dan $A=4$. Walaupun kontroler linear menghasilkan error pada saat terjadinya tracking, yang mana error pada tracking tersebut

disebabkan oleh kontroler yang nonlinear dan dapat diabaikan.

4. Kesimpulan dan Saran

Pada jurnal ini kita ingin menunjukkan kestabilan dua buah gerobak dengan menggunakan system pendulum terbalik . system ini sulit untuk menemukan keluaran dari regulation pada system yang nonlinear dengan nonhyperbolic zero dynamic. Kita juga telah melakukan metode aproksimasi untuk menyelesaikan persamaan center manifold yaitu dengan ekspansi deret Taylor. Kita mencatat bahwa kontroler pada persamaan (6) pada solusi persamaan regulator tidak kuat dengan berbagai nilai parameter yang ada.

5. Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kepada :

1. Pengelola Rumah Jurnal UIN Imam Bonjol Padang
2. Jurnal MAP Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol
3. Rekan-Rekan Dosen program studi matematika
4. Para penulis Jurnal Map program studi matematika UIN Imam Bonjol Padang

Daftar Pustaka

- [1] A. Isidori dan C.I. Byrnes. 1995. *Output regulation of nonlinear system*. IEEE Trans. Automat. Contr. Vol 40, pp 1497-1500.
- [2] Jie Huang. 2000. *Asymptotic Tracking of a Nonminimum Phase Nonlinear System with nonhyperbolic Zero Dynamics*, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol 45, No.3.
- [3] Hassan K. Khalil. 2002. *Nonlinear System Third Edition*. Prentice Hall
- [4] Astrom, K. J., Futura, K. 2000. Swinging up a Pendulum by Energy Control, *Automatica*, Vol. 36 pp 287 – 295.
- [5] Earl, M.G., D’Andrea, R. 2005. *Design and Implementation of a Minimum Time Translation for an Inverted Pendulum*. Proceeding of the Asian Conference of Industrial Automation and Robotic. Bangkok.
- [6] Lewis, F. L., Syrmos, V. L. 1995. *Optimal Control*. John Wiley and Sons, pp 170 – 174.
- [7] Olsder, G. J., 1994. *Mathematical Systems Theory*, 1994, Delftse Uitgevers Maatschappij, Netherland, pp 13 – 16.
- [8]. Eizadiyan Muhammad Ali. 2015. *Control of Inverted Pendulum Cart System by Use of PID Cotroller*. Sci.Int.(Lahore). 27(2):1063-1068
- [9]. Putri RA dan Agustinah T. 2013. *Kontrol Tracking Fuzzy-Optimal untuk Sistem Pendulum-Kereta*. Jurnal Teknik Pomits.; 2(2):333-338.